整体建构下数的运算教学

江苏第二师范学院教育科学学院(211200)　王智明

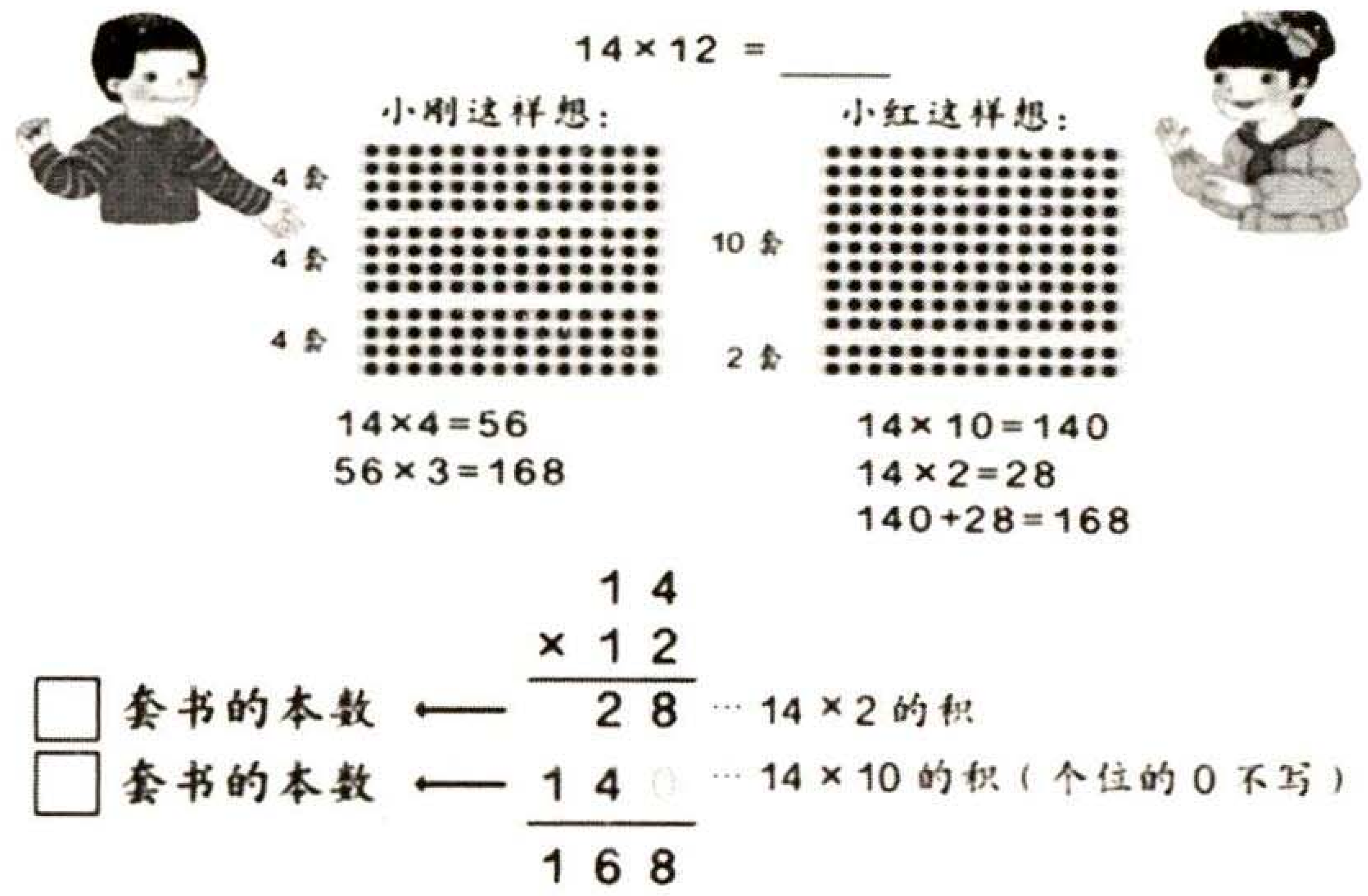
纵观当下的教学实践,不少教师对数的运算中某一单元整体知识的教学研究较多,而对几个单元甚至不同年级的相关单元知识的整体教学尚缺乏深入研究。如果学生习得的运算技能局限于某一个单元或某一个年级,显然不利于学生形成科学的思维方式。本文希冀通过对小学数学中数的运算教学的研究,为计算单元教学找到"统领"的抓手,发挥单元结构的整体力量。

一、数运算教学中的整体思想

当下的教材或教学带给我们这样的认识:整数、小数、分数有各自的运算方法,这些内容看似独立、各成一体,而事实上,整数、分数、小数的运算是一个整体,教科书往往由于学生认知水平的阶段性和教学的需要,呈现了一个个独立的部分,让教师没有感受到数的运算中的整体性。笔者从运算的横向、纵向、整体上挖掘教材内隐体系中的整体性思想,为运算教学找到统整的抓手。

1.从横向看法理融通。

算理为算法提供了理论指导,算法则使算理具体化,于是乎每一种四则运算都可以看做算理与算法的统整。一般而言,算理让学生感受其中的道理,以横式记录了过程。算法是算理对应的计算,一般以列竖式的方法呈现。以"两位数乘两位数"的乘法计算为例,感受从横向看算理横式与过程算法竖式的对应。人教版教材以乘法点阵模型将算理融入情境与直观图之中。从直观的比较可以看到两位数乘两位数需要把其中一个乘数拆分,可以是分成两个因数之积,也可以是拆分为几十和几之和,转化为两位数乘一位数。而从横式与竖式的沟通联系上看,应在教学中引导学生选择拆分为和式来思考。面对直观图学生会写出三道横式:$14\times10=140$,$14\times2=28$,$140+28=168$,而算法的竖式记录是对算理的简化表示,即在竖式第一层表示了28个一,对应了直观图零散的两排,第二层竖式记录对应了直观图一个十整排,即算理的实际记录是"14乘以1个十",对应竖式与十位对齐,竖式的结果是28个一和14个十累加得结果。从两位数乘法横式与竖式的对应可见,数运算中的情境为理解算理提供了模型,而竖式是横式的简化记录,情境意义、计算过程、竖式记录三者密切关联,直观模型与形式表征两者呼应,彰显算理与算法的融通。



2.从纵向看运算的整体性。

在数的运算中,加减运算不论运算对象都可以视作相同计数单位个数的累加(减),即计数单位架构了加减不同运算法则的运算对象。同时计数单位也沟通了乘除法运算的对象。分数的除法和乘法的计算都是基于计数单位进行的,体现了计数单位的个数与计数单位的运算。从而整数、小数、分数的四则运算都可以统整为计数单位个数的累加(减),从而实现算理的贯通。从纵向过程上看,计数单位勾联了不同运算过程,一致体现为计数单位的累加和细分,形成内容上的统一。学生通过直观表征、形式表征两者相互结合理解计数单位的作用,形成过程上的统一。同时在四则运算的推导过程中,渗透了转化思想,发展了数学推理意识。不同运算相互影响、交叉融合,推动了运算在数学学科中的价值。

3.从整体上看数与运算的一体性。

运算的对象是数,因而数概念与数运算两者一脉相承。数概念是理解数运算的重要基础,夏永立老师的《加减乘除是一家》一课通过游戏和数形结合展现了四则运算的意义以及不同运算的内在联系。加法就是以1为计数单位往后一个一个计数,减法则是以1为计数单位一个一个往回计数。整数乘法是以0为起点,以其中一个乘数为计数单位往后成倍计数,而除法则是以单位量为基础往回成倍递减计数。夏老师整节课以一根数线(数轴)贯穿始终,通过跳动的磁扣向学生直观呈现了数线中跳动的格子数、跳动的方向与计数过程、不同运算之间的内在联系,把零散的运

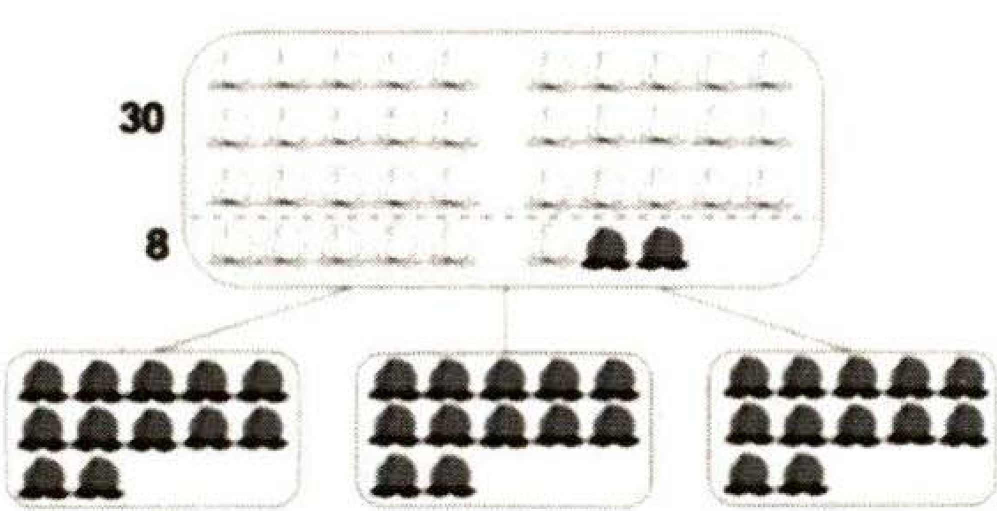
本文系基金项目:江苏省2022年高校哲学社会科学一般项目——数学理解下的课堂教学整体设计研究。(2022SJYB0509)

算概念结构化。同时还可以看到数概念的认识、数运算的理解都与计数单位相关,前者体现了对计数单位的计数,后者体现了计数单位的运动。

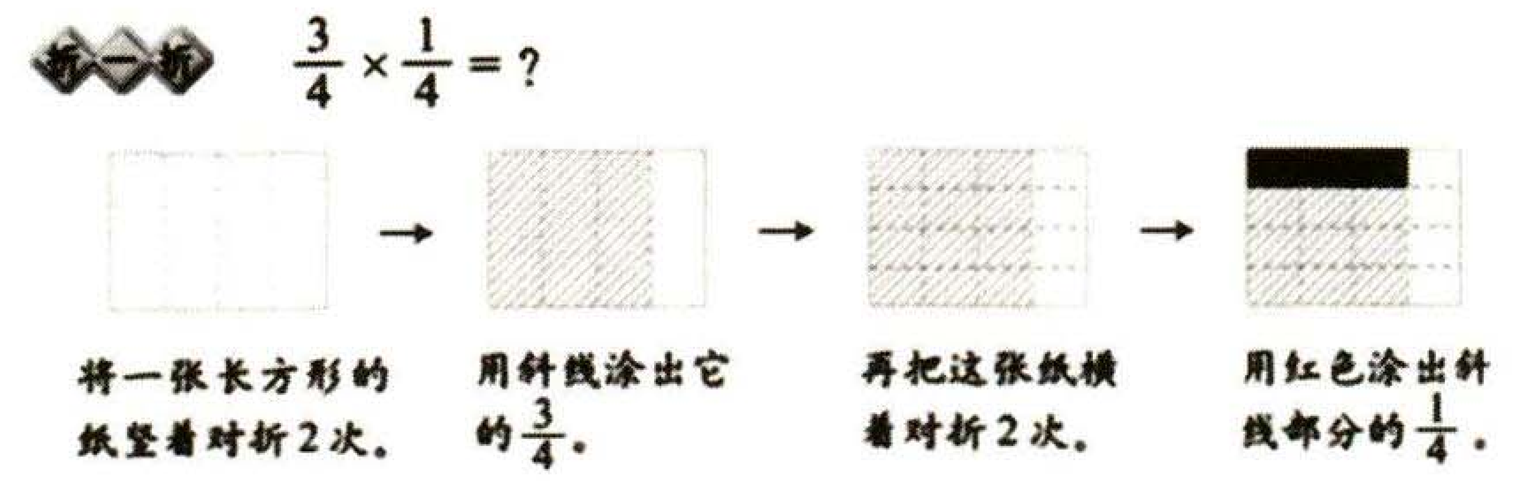
二、整体建构下数的运算教学策略

1.利用多重表征,感悟法理融通。

运算教学中,运算的程序与步骤即“算法”,程序和步骤的道理即“算理”,两者相辅相成,需要在学生理解算理的基础上指导学生掌握算法,学生不同的列竖式的过程到形成通法是对算法的优化,其记录的过程是对算理的再理解,也是算理意义的直接体现。数学上理解是指当学生能够将概念从一种表征形式转化为另一种表征形式时,理解就产生了。要想真正理解算理,就要贯通算理的各种表征方式,从算理的直观走向算法的抽象,进而实现优化的、有意义竖式记录和算理理解的真正融合。教师要实施法理融通的教学,就需要把运算教学看成一个整体,注重运算教学的结构化,通过实物模型直观表征或是通过半直观半抽象表征或通过形式的抽象化表征法理融通,从不同层次引导学生表述算理、理解算理、记录竖式达成算理与算法的融合,进而不断提高学生的运算能力。



首先,利用实物模型直观表征法理的融通。利用实物模型的操作理解算理在低年级的运算中较为常见。例如两位数除以一位数,38÷3,常见利用课件呈现了分桃子的直观图,从直观图中清晰地呈现了两次分的过程,与整数乘法的算理相同,先整十整十地分30÷3=10,对应了除法竖式的十位,再单个单个地分8÷3=2……2,对应了除法竖式中的个位。利用情境中的直观图,学生关注了情境中所蕴含的“整十”结构,通过整十分、单个分直观表征了算理的理解,以及横式分的过程与除法竖式记录算法过程的一致性。中高年级的运算依然需要直观达成法理融通,如分数乘法,教材呈现了折纸的过程,通过长方形纸对折,利用折痕很好地展现了分数运算的算理,分母乘以分母,可见直观模型表征了算理的理解过程,达成了对算理及算法的表征。



其次,利用半直观半抽象表征法理融通。数学教学中通过抽象形成的基本的量或数学模型称为半直观半抽象情境。运算中半直观半抽象的情境丰富,有涉及单价、数量、总价三者关系,有涉及相邻单位进率为10的货币单位的情境,有涉及面积的模型,相邻单位进率亦为10的长度单位的情境,这些丰富的半直观半抽象背景为运算的算理的解释提供依据。例如,小数乘整数的计算教学中,0.3×8等于多少,可以利用连加求和模型得出结果,但不利于理解算理。教材创设了夏天西瓜每斤0.3元,8斤多少钱。学生很自然会联系货币的单位换算,0.3元就是3角,先利用整数乘法转化为24角,再利用单位换算转化为元,利用半直观半抽象的说理过程,实现货币单位的转换,其实质就是把乘数扩大10倍,也即小数乘法的算理。

最后,利用形式化抽象表征法理融通。法理融通的形式化的抽象表征建立在直观表征、半直观半抽象表征基础之上,需要学生对数的意义,数的直观表征有很好的概念性理解。例如,0.2×8的直观表征可以理解为:每块橡皮0.2元,8块橡皮多少钱?利用将单位面积等分的直观模型图建立比率模型;抽象表征可以是8个0.2相加(乘法的意义),可以看做8的$\frac{2}{10}$是多少(使用分数的意义),可以0.2是2个0.1,8个0.2就是16个0.1,是1.6(小数计数单位的理解及比率的推理)。在这些形式化的抽象表征中,达成对积的不变规律的理解需要借助直观面积模型图、半抽象的单位量的累加模型。学生经历从几何直观中“会算”到语言推理中“会想”,再到从整数到小数、从表象到本质的形式化抽象表征。在不同表征中凸显了算理融通的比率模型,形成了相互贯通的算理理解。

2.利用情境,感悟计数单位的一致性。

奥苏贝尔倡导设计清晰稳定、包摄性广且与教材内容相关的引导性材料作为学生学习新知的脚手架。教学活动的开展需要设计能够调动学生认知经验与学习兴趣的情境。运算教学中的情境以有货币单位、长度单位、面积单位、重量单位、容积单位等为情境的素材,这些计量单位都有形象直观的背景,且相邻基本单位进率为10。情境设计以交易情境为主,也有一些度量情境,不论是以元、角、分对应的交易情境还是以面积单位对应的度量情境,其情境都指向运算的数学本质,即体现了计数单位以进率为10的倍增和细分,也即运算中计数单位的运动。运算教学除了以一些常见的量为情境的素材,还可以在某一个单元计算复习中,以复习旧知为情境为素材,体会数运算的整体性。如,喻桂江老师在其“分数除法”的练习课中让学生对列举的分数除法算式进行分类,同时结合整数除法的平均分、画图的方法解释整数除以分数、分数除以整数的算理,从直观初步感受分数除法与整数除法的意义。当学生解释分数除以分数的算理感到困难时,教师通过借助学生列举的实例辅以演绎推理将不同单位分数转化为相同单位分数再计算,从形式化表征感

重构“分数除法”单元 体会除法运算一致性

北京市海淀区中关村第三小学(100089)　施宝春

分数除法是很难体会除法运算一致性的。因为整数除法的意义结合现实背景通常理解为“平均分”或“包含除”，但无论哪一种理解，都很难拓展到分数(小数)除法的算法，因此需要寻求新的理由。然而新理由通常要用到乘法和除法的结合，要证明这样结合的合理性是非常困难的。而且分数除法“除以一个数等于乘这个数的倒数”的算法也很难与整数、小数除法建立一致性。

其实《九章算术》所介绍的分数除法的运算方法采用了先将两个分数通分，再使分子相除的方法(称之为“经分”)，即：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=\frac{ad}{bc}$。

其本质就是个数除以个数、计数单位除以计数单位的运算，通过第二个算式也可以看出，计数单位一致时除法运算就是计数单位个数的运算。可见，学生学习的“除以一个数等于乘这个数的倒数”是优化后的算法，隐藏了一致性。

鉴于此，笔者思考：如果放手让学生规划分数除法学习路径、自主探索分数除法算法，学生是否会走出一条体会除法运算一致性的学习路径呢？下面是笔者在班级中的教学尝试，引导学生经历数学化的过程，感悟数学的本质，取得了较好的效果。

一、重新架构单元

笔者学校使用的是北师大版小学数学教材，通过教材和学情分析，笔者提炼了分数除法单元的具体观念，思考了关键问题，设计了核心任务，具体单元架构见表1。

表1　“分数除法”单元新架构

单元具体观念	关键问题	学习任务	课时
学生迁移分数乘法的学习经验可以规划分数除法的学习路径。	分数除法单元可以怎样学习?	1. 规划《分数除法》单元的学习路径(内容、顺序、方法) 2. 确定算法研究对象(算式)	1
基于数概念、除法意义、运算律等可以探索出分数除法的一般算法，发展学生的推理意识和运算能力；沟通整数、小数、分数除法的联系，可以帮助学生体会除法运算的一致性。	分数除法的意义是什么?	3. 探索分数除法的意义	1
	分数除法怎样算?	4. 探索分数除以整数的算法	1
		5. 探索整数除以分数的算法	1
		6. 探索分数除以分数的算法(总结分数除法的一般算法) 7. 探索整数、小数、分数除法的联系	1
把除法算式还原成现实问题，有助于学生理解除法运算的意义，发展应用意识。	如何应用分数除法解决实际问题?商与被除数大小有怎样的关系?	8. 列方程解决实际问题 9. 探索商与被除数大小的关系	1

(接上页)受分数除法与整数除法的相通性。在回顾反思的过程中，教师再次结合具体实例分别拿出了整数、小数、分数除法，90÷30，0.9÷0.3，$\frac{9}{10}\div\frac{3}{10}$探索发现分数除法与整数除法、小数除法计算方法的一脉相承。[1]

3.利用方法的迁移，让学习者有全局感。

利用数认识的理解迁移到对运算算理的理解，让学习者初步感知数学内容的全局感。例如，二十以内的进位加法运算，9+4=?，教学中可以沿用后继数来数，最终在多样化的方法中形成优化的“凑十法”，其本质体现为计数活动中的位值制，与以十为计数单位一脉相承，通过数运算的教学，强化数意义的认识，感悟数概念的再应用，让学习者在最初的数运算的学习中感悟数与运算的统一。又如，在学习两位数乘一位数的基础上，引导学生探索两位数乘两位数的方法，感悟并理解一位数乘法到两位数乘法算理和算法的迁移。学生已知14×10的计算方法和14×2的计算方法，探索14×12的计算方法。算理的理解过程就是根据数组成的意义引导学生将12分解成10+2，然后利用横式体现算理。

利用运算内容的关联与迁移，让学生理解运算的全局感。几乎所有运算的算理均来自运算律与等式的基本性质。例如，三位数乘以两位数的笔算乘法102×32=？通过乘法分配律理解算理，将运算的算理与运算律结合，通过运算律来理解算理，把单纯的乘法分配律仅仅给学生带来计算上的简便，关联了运算律与算理，让学生理解了运算内部的全局感，发挥了运算律更大的价值。与算理理解直接相关的是“计数单位的‘累加’”，从低年级的整数运算到高年级的分数、小数运算，计数单位这一概念在不同年级、不同的运算单元中重复出现。从这个意义上讲，利用不同运算的迁移，把握不同运算内容，有助于实现知识和方法的迁移，在迁移应用中形成全局感。

```
  32×102                      32
=32×（100+2）              × 102
=32×100+32×2   ⟶             64.........32×2
=3200+64                   3200.........32×100
=3264                      3264
```

参考文献：

[1]喻桂江.融通理法 思维进阶[J].小学数学教育,2021(7-8):117-118.