

一致性视角下小学数学运算知识的理解及教学改进

王智明 (江苏第二师范学院教育科学学院)

《课程标准(2022年版)》设计了体现结构化特征的课程内容,并在基本理念和课程内容中明确提出:“对内容进行结构化整合,探索发展学生核心素养的路径。”“能进行小数和分数的四则运算和混合运算,感悟运算的一致性。”在此背景下,教师应从整体性和一致性的角度深入理解教学内容本质,探寻知识之间的联系,促进学生思维进阶,帮助他们形成和发展核心素养。就当下而言,教师更应当思考旧教材遇到新课标,教学如何顺势而为、乘势而上。下面通过对小学数学中运算知识一致性的研究,找到统领计算教学的抓手,将教师所理解的内容一致性转化为学生对核心概念的真正理解,进而建构数与运算的一致性,发挥结构的整体力量。

一、对运算知识一致性的理解

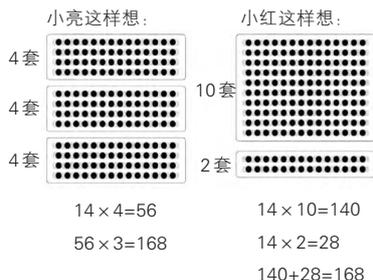
考虑到学生认知水平的阶段性以及教学的需要,教材一般是将运算知识分解成若干个部分,分散编排在不同年级、不同单元中。这样呈现,容易出现整数、小数、分数各讲各的理,各有各的法,学生难以感受到运算的一致性。事实上,整数、小数、分数四则运算虽然运算对象不同,但本质上是一个整体。从一致性的角度看,整数、小数、分数四则运算彼此之间是关联的。下面从运算的横向、纵向以及整体角度分析小学数学教材体系中内隐的一致性,为教师理解运算、实施教学找到统整的抓手。

1. 从横向看:法理融通的一致性。

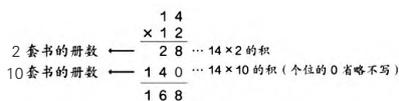
算理和算法是运算能力的两翼,是不可分割的整体,也是运算一致性的体现。算理为算法提供了理论依据,算法则是算理的具体化。四则运算都离不开算理与算法的共同作用。一般而言,算理以直观的方式呈现,用横式记录运算的过程;算

法是与算理对应的简便方法,一般用竖式记录运算的程序。在计算教学中,教师一般从直观出发,用横式记录对算理的理解,并以此为基础,通过竖式算法的符号表征,达成横向联系与贯通。下面以“两位数乘两位数”为例,从横向分析直观算理与过程算法之间的一致性。

现行教材一般使用点阵模型将算理融入情境与直观图之中(如下图)。



从直观图中可以看出,计算两位数乘两位数,把其中一个乘数拆分成两个数的积或两个数的和,都可以转化成已经学过的两位数乘一位数的计算。从横式与竖式的联系来看,教学中应重点引导学生理解“拆成两数和”的方法。观察直观图,可以写出三道横式:14×10=140,14×2=28,140+28=168。而算法的竖式记录则是对算理直观化的简化表示。竖式第一层表示28个一,对应直观图中两行的个数,竖式第二层对应直观图中10行的个数,竖式的结果是28个一和14个十的相加的结果(如下图)。



教材呈现既有直观横式,也有与横式对应的竖式以及将竖式进一步形式化

的过程。可以说,教材的呈现体现了横式算理与竖式算法的一致。“两位数乘两位数”的教材呈现表明,运算中的情境为理解算理提供了直观模型,而竖式是横式的简化记录,情境意义、计算过程、竖式记录三者密切关联,直观模型与形式表征两者彼此呼应,彰显了算理与算法的一致融通。

2. 从纵向看:计数单位的统领性。

计数单位的概念贯穿在不同运算中,整数、小数、分数四则运算都是基于计数单位进行的。加、减法运算可以视作相同计数单位个数的计算,计数单位架构起加、减运算的一致性。乘法是求几个相同加数和的简便运算。从模型化角度讲,乘法需要识别几个几。例如,3×5可以识别为5个3或3个5。前者可以理解为以数3作计数单位,三个三个地数,累加5次;后者可以理解为以数5作计数单位,五个五个地数,累加3次。这样看,整数乘法就是计数单位的成倍累加。再看小数乘法,以0.3×0.7为例,就是3个0.1乘7个0.1,即21个(0.1×0.1)。其中,21是计数单位成倍累加的结果,0.1×0.1(0.01)是计数单位与计数单位相乘的结果,也就是原先计数单位成倍累加得到的新的计数单位。分数乘法同样如此。例如, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = 2$ 个 $\frac{1}{3} \times 1$ 个 $\frac{1}{2} = (2 \times 1)$ 个 $(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2})$, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ 是计数单位与计数单位相乘,可以理解为单位积,也就是原先计数单位成倍累加得到的新的计数单位。综上所述,整数、小数、分数乘法本质上都是计数单位的累加以及单位与单位相乘产生新的单位。

继续看除法运算。在度量视角下,整数、小数、分数除法,可以统一为“包含分”,其实质就是将两个量变成相同计数

单位,然后用一个量作标准(除数)去度量另一个量。例如,560÷80可以理解为56个十除以8个十。小数除法、分数除法同样如此。此外,除法还可以理解为计数单位的不断均分。例如,52÷2,先把5个十平均分成2份,再把12个一平均分成2份。小数除法与整数除法道理相通。关于分数除法,可以通过计数单位的推演表征算理,从而体会分数除法与整数、小数除法的一致性。

$$\frac{c}{a} \div \frac{d}{b} = \frac{bc}{ab} \div \frac{ad}{ab} = (bc) \div (ad) = \frac{bc}{ad}$$

从纵向过程上来看,计数单位能够关联不同的运算过程,一致性体现为计数单位的统一以及计数单位的累加和细分。学生可以通过直观表征、形式表征的相互结合理解计数单位的统领性作用,形成对不同运算过程一致性的理解。从学习过程的价值看,整数、小数、分数四则运算的运算过程,是依据运算律、运算性质展开的逻辑推演,有助于学生发展数学推理意识,这其实也体现了价值上的一致性。不同运算相互影响、交叉融合,共同指向对运算本质的多元理解,而运算中的计数单位融合了数学思想,能够很好地体现运算在数学中的价值。

3. 从全局看:数与运算的整体性。

《课程标准(2022年版)》在第一学段教学提示中指出:“数的认识与数的运算具有密切的联系,既要注重各自的特征,也要关注二者的联系。”首先,数的意义、数的组成、数的读写、数的大小比较都和运算密切相关。整数、小数都遵循十进制计数法,相邻计数单位之间的进率是10,某个数位上的数字是几就表示有几个这样的单位。分数同样可以理解为分数单位的累加。例如 $\frac{3}{4}$ 里面有3个 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ 就是分数单位, $\frac{3}{4}$ 是用分数单位度量3次得到的结果。因此,在数的认识中,无论是整数、小数还是分数,都需要分析计数的单位是什么,以及包含多少个这样的单位。其次,数的意义是理解数的运算的重要基础,对数的运算本质意义上的理解就是对数的意义的再解读。运算的对象是数,计数单位统领不同运算内容的一致性,数概

念与数运算两者一脉相承。

数的意义和四则运算的内在联系,可以借助数形结合加以体会。加法就是以1为计数单位向后逐个计数,减法则以1为计数单位往前逐个计数。乘法是以0为起点,把其中一个乘数作为计数单位向后成倍计数,而除法则以单位量为基础往回成倍递减计数。借助数轴,可以看到数概念的认识、数运算的理解都与计数单位相关,前者侧重于计数单位的计数,后者侧重于计数单位的运算。

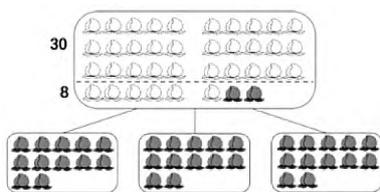
二、一致性视角下数运算教学的改进

基于上述分析可知,运算的一致性体现在算理与算法横向的一致性、计数单位贯穿于不同运算的纵向一致性,以及数的认识与数的运算整体上的一致性。在现阶段,当旧教材遇到新课标,要落实数的运算教学一致性理念,发展学生核心素养,应当关注以下几点。

1. 借助多重表征,感悟法理融通的一致性。

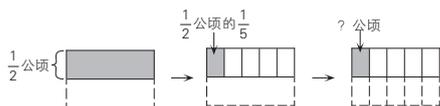
实施法理融通一致性的教学,可以通过实物模型直观表征、半直观半抽象表征、形式化抽象表征引导学生从不同层面表述算理、理解算理,进而用竖式记录计算过程,达成算理与算法的融通一致。

首先是利用实物模型直观表征。利用实物模型以及相应的操作活动理解运算的算理,在低年级计算教学中较为常见。例如,计算38÷3时,教学一般利用课件呈现分物(如分桃)的直观图(如下图)。直观图清晰地呈现了两次分的过程:先整十整十地分,30÷3=10,对应除法竖式中的十位;再一个一个地分,8÷3=2……2,对应除法竖式中的个位。借助直观图,学生会注意到情境中所蕴含的“整十”结构,通过先分几个十、再分几个一,直观理解算理,体会横式分的过程与竖式记录的算法过程的一致性。



其次是利用半直观半抽象表征法。数学教学中通过抽象形成的基本的量或

数学模型称为半直观半抽象表征。在小学阶段,运算中的半直观半抽象表征主要涉及单价、数量、总价三者关系,相邻单位进率为10的货币单位,长度单位,面积模型,等等。这些半直观半抽象背景能为学生理解算理提供直观支撑。例如,0.8×3等于多少,虽然可以根据运算意义通过连加计算出结果,但抽象的计算不利于理解算理。苏教版教材创设购物情境:“西瓜每千克0.8元,买3千克需要多少元?”学生很自然会联系货币单位进行换算,0.8元就是8角,先利用整数乘法算出结果是24角,再将24角转化成2.4元。利用半直观半抽象表征进行说理,既能把抽象的算理展示得较为清楚,又能直观显示法理的融通一致。又如,教学分数乘分数时,可以引导学生在面积模型中分一分、画一画,表征算理的理解过程,达成对算理和算法一致性的表征(如下图)。



最后是利用形式化抽象表征法。学生的思维需要从直观表征、半直观半抽象表征逐渐上升为形式化表征,进而对算理、算法达成概念性理解。例如,0.2×8,抽象表征可以是8个0.2相加(乘法的意义),可以是8的 $\frac{2}{10}$ 是多少(使用分数乘法的意义),也可以看作2个0.1乘8(小数的意义)。学生经历从几何直观中的“会算”到语言推理中“会想”,再到形式化抽象表征的“会推理”,在不同表征中感悟算理和算法的融通,就能逐步形成具有一致性的算理理解。

2. 借助对比辨析,感悟计数单位的一致性。

现行教材通常把各部分内容分散呈现。这样的呈现方式虽然降低了学生理解的难度,方便了教学,但给教师整体把握教材、理解教学内容的一致性带来了挑战。郑毓信教授提出,数的认识与运算的教学应当很好地突出“比较”这样一个核心概念。在数的运算教学中着眼于整数、小数、分数运算算理本质上的一致性,在(下转第8页)

就暴露了学生在确定位置过程中出现的“描述位置不精准”“角度描述以什么为标准有分歧”等问题。

3. 有效对话,解决问题。

巴西著名教育学家弗莱雷曾说过:“没有了对话,就没有了交流;没有了交流,也就没有真正的教育。”当学生的问题暴露之后,如何引导他们发现自身认知的问题,从而厘清认识?笔者认为,对话交流是解决问题的很好方式。

对话交流的关键是引发争辩。不同答案的背后一定有不同的想法在支撑。通过争论、辨析,可以把这些想法中的问题加以澄清,同时将学生的错误认知加以纠正。从上面的生生对话中可以发

现,学生在对话过程中逐渐认识到分数是部分的份数与整体的份数进行比较的结果。也正是因为认识到这一点,他们才形成共识,明确可以用“2份中的1份,也就是 $\frac{1}{2}$ 来表示更为合理”。争辩不是目的,其意义在于澄清认识、完善认知、促进理解。

对话交流还能促进学生自省。对话并非只有言语的交流,也是思想的碰撞、情感的共鸣以及对问题所达成的共识。在参与对话或在聆听他人的对话时,学生可以将自己的想法与别人的观点作对比,以此反思自己的想法。上面的教学中,一开始用“ $\frac{1}{4}$ ”表示结果的学生就是在聆听伙

伴对话时进行自省,才有了“老师,我知道这肯定不对”的认识。

教学时,我们经常会遇到一些知识“不好教”,感觉明明已经解释得非常清楚,但学生依然弄不明白。其实,学生认知上的很多问题并非是教师通过反复讲解就能解决的。发现问题、暴露问题、解决问题,这三部曲或许就是帮助教师解决学生困扰的好办法。

(责任编辑 毛晓芳)

(上接第5页)

学生理解算理之后,可以关注算法的关联,引领他们通过比较辨析逐步建立对运算结构的整体性认识,促进整数、小数和分数运算算理的有效迁移。

例如,178÷30,由于被除数的前两位不够除,教师一般会让学生看前三位,引导他们思考178里面包含多少个30。从一致性角度看,教师还可以将三位数除以两位数与之前学过的三位数除以一位数,以及两、三位数的退位减法进行对比。即如,对于178÷30、148÷6、236-149,在计算过程中出现不够除或不够减情况,怎么办?由此引导学生进行比较中认识到,这类情况都需要把较大的计数单位进行拆分,“退一作十”后再运算,从而体会计数单位的一致性。

再如,教学分数除法的内容时,可以让学生对分数除法算式进行分类,再联系整数除法的学习经验解释分数除以整数的算理,初步感受分数除法与整数除法的一致性。当学生解释一个数除以分数的算理出现困难时,再辅以演绎推理,引导他们将不同单位的分数转化为相同单位的分数,通过形式化表征感受分数除法与整数除法内在的一致性。在回顾反思阶段,还可引导学生结合具体算式再次比较整数、小数、分数除法,感受分数除法与整数除法、小数除法运算的一致性。

3. 借助内容方法的回顾,感悟数与运算的整体性。

数的运算教学所关联的核心素养主

要是运算能力和推理意识。其中,运算能力主要体现为根据法则和运算律进行正确运算的能力。对运算法则、运算律的理解和运用离不开对数概念的认识。马云鹏教授指出,数与运算不可分。纵观小学数学中数的运算,虽然法则看似各异,算理也不尽相同,但都可以回归到数的意义上加以诠释,还原为计数单位及其个数的运算,利用内容的关联与方法的迁移,凸显数与运算的整体性。

首先,数的意义与运算法则是一致的。以“9+4”为例。教学中可以先利用逐次添1的方法数出结果,在此基础上引导学生逐步理解优化的“凑十法”。从表面来看,“凑十法”是一种十分简洁的计算方法,但其本质仍然体现了计数活动中位值制的应用,其与认数过程中以“十”为计数单位进行计数是一脉相承的。通过在低年级数的运算起始教学中强化数的意义,感悟数概念的应用,能使学生在数的运算学习中逐步体会数与运算的一致性。数的运算的教学重点在于理解算理、掌握算法,而算理的理解最终都要追溯到数的意义。因此,从低年级的整数运算到高年级的分数、小数运算,要把计数单位这一核心概念贯穿其中。简单地说,数的运算都是在算计数单位的个数。

其次,通过对数的意义的理解能够促进对运算律的理解。运算律是四则运算的理论依据,几乎所有运算的算理均来自

运算律与等式的基本性质。这体现的也是运算内部的整体性。例如,在教学两位数乘两位数的基础上,引导学生探索三位数乘两位数的方法时,可以组织他们回顾以往的乘法学习过程,迁移已有的思维方法经验,将未知转化为已知,感悟运算一致性。以“102×32”为例,可以通过几何直观将乘数进行合理的拆分,还可以通过乘法运算律来理解算理,以此就能帮助学生理解运算内部的整体性,彰显运算律的教学价值。

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部制定.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2]王智明.小学数学的变中不变思想[J].小学数学(小学版),2023(5).
- [3]张平,潘禹辰,徐文彬.大概念下小学数学的知识理解与教学改进——以度量视角下的“数与运算”为例[J].教学月刊(小学版·数学),2022(10).
- [4]马云鹏.聚焦核心概念,落实核心素养[J].课程·教材·教法,2022(6).

★本文系2022年度江苏高校哲学社会科学一般项目《数学理解下的课堂教学整体设计研究》(项目编号:2022SJYB0509)的阶段性研究成果之一。

(责任编辑 毛晓芳)