

编者按：从数的认识的整体视角出发，基于数概念本质的一致性，让学生认识到分数产生的价值，充分理解分数的本质，以及与整数的一致性和关联性。

基于数概念的一致性，探索分数的意义

——以《分数的初步认识》教学为例

○ 江苏第二师范学院教育科学学院 吴汝萍

理解分数的意义是公认的教学难点。很多教师认为其难以理解的原因在于它的双重性，分数既可以表示两个量之间的倍比关系（即率的意义），也可以表示某个量的具体值（即量的意义）。例如 $\frac{1}{3}$ ，它既可以表示小红完成作业的时间是小明的 $\frac{1}{3}$ ，也可以表示小明完成作业需要 $\frac{1}{3}$ 小时。

其实整数也是如此。比如“3”，既可以表示“黄花有3朵”，也可以表示“红花的朵数是黄花的3倍”。学生理解整数的意义时并没有觉得困难，他们知道整数的本源——表示数量，所以认识整数时，应先通过“3朵花”“3个人”等数量来认识“3”，再认识“红花的朵数是黄花的3倍”这样的“倍比”关系。

一、分数的本源

分数的本源是什么？在拉丁文里，分数来源于“破碎”一词，分数也曾被人称作“破碎数”；在英文中，分数是“fraction”，其意为部分或少量，表示整数的一部分；俄语中的分数意为“被分割的数”；《说文解字》将“分”解释为：分，别也。从八从刀，刀以分别物也。虽然各国语言文化背景不尽相同，但从语义学上讲，分数是“分”出来的数，起源于“分”。

在古代，人们在分配物品过程中，会出现分配结果不是整数的情况；在土地计算、水利工程等测量过程中，也会出现测量结果不是整数的情况，就产生了分数。《分数的初步认识》“你知道吗”指出：在古代，人们分东西（果实、猎物等）时经常出现结果不是整数的情况，于是渐渐产生了分数。《分数的意义》中指出：在进行测量、分物或计算时，往往不能得到整数的结果，这时常常用分数来表示。这些也说明分数是“分”出来的这一历史事实。但不管是分配产生的分数，还是测量产生的分数，表示的结果都是数量。

由此可见，从数的起源和发展历史来看，分数最初表示的是数量多少，而不是倍比关系。所以，分数的本源表示的是“量的意义”。

二、认识分数的起点

学生初步认识分数，从哪里开始能事半功倍？是先认识分数“量的意义”还是“率的意义”？亦或“量”和“率”并行，双管齐下？

现行数学教材关于“分数的初步认识”的编排，人教版设置的是“分1块月饼”的情境：把1块月饼平均分成2份，每份是这块月饼的一半，也就是它的二分之一，写作 $\frac{1}{2}$ 。北师大版设置的是“分1个苹果”的情境：2人分1个苹果，平均每人得到

这个苹果的一半。一半可以用 $\frac{1}{2}$ 表示,读作二分之一, $\frac{1}{2}$ 是分数。苏教版设置的是“分1个蛋糕”的情境:把1个蛋糕平均分成2份,每人分得半个。半个也就是二分之一。进而指出:把1个蛋糕平均分成2份,每份是它的二分之一,写作 $\frac{1}{2}$ 。

上述三个版本教材所用情境都是“把一个物品平均分成2份”,让学生思考“每个人得到多少”,从中发现:分的结果比1小,出现了比1小的量。情境问题指向的是数量,属于“量的意义”。

表述分的结果时,人教版和北师大教材都用了“一半”这个词。“一半”指向的是部分与整体的关系,属于“率的意义”。苏教版教材用“半个”表示分的结果,并表述为:半个也就是二分之一。很明显,“半个”“ $\frac{1}{2}$ 个”指向的是数量。但后面进一步抽象二分之一的意义时,又改述为部分与整体的关系:把1个蛋糕平均分成2份,每份是它的二分之一,写作 $\frac{1}{2}$ 。

由此可见,人教版和北师大教材是直接引导学生从“率的意义”来认识、理解抽象出的分数。苏教版教材注意“量”和“率”并行,但轻“量”重“率”。分数“量的意义”只是点到为止,重点放在了对其“率的意义”的理解。

上述教材编排“分数的初步认识”,都略过分数“量的意义”,着力由等分关系直接进入部分与整体的关系,由“率的意义”抽象出分数。后续借助分数来认识小数时,学生很难理解“1分米= $\frac{1}{10}$ 米”。因为教材中已有分数都表示关系,后面不带单位名称。学生通过大量模仿练习,好不容易习惯了表示关系的分数,突然又遇到带单位名称的分数,自然感到困惑。

其实,从知识构建角度看,学生更倾向于从数量的角度理解数。认识整数时,如果先通过“谁

是谁的3倍”来认识“3”,学生理解起来一定是非常困难。同样,直接用“每份是它的几分之一”来认识表示关系的分数,对学生来说,难度自然也非常大。由此可见,初步认识分数,如果忽视了分数“量的意义”,就忽视了学生的认知规律,忽视了让学生感悟数概念本质上的一致性,这也是造成理解障碍的主要原因。

既然分数的本源是表示“量的意义”,“分数的初步认识”应该遵循数概念本质上的一致性,先认识表示“量的意义”的分数。等学生完全理解了“量的意义”的分数后,再认识表示“率的意义”的分数,自然变得顺畅无碍。

三、教学重构

数是对数量的抽象。学生认识整数时,是由物体的量抽象出数量,再抽象出整数,进而学习用整数表示物体的数量。教学《分数的初步认识》,可以延续认识整数的方法,由比1少的物体的量抽象出数量,再抽象出分数,进而学习用分数表示比1少的数量。这样可以体现分数是对数量的抽象,突出对分数“量的意义”的理解,让学生感悟数概念本质上的一致性。

【片段一】创设引发数域扩张的问题情境

1. 明确以前认识的数都是整数。

出示月饼图片,让学生一一数出月饼的块数。学生从中认识到1、2、3、4……都是用来表示完整的物体个数,它们是一个大家族,叫整数。整数的计数单位有一(个)、十、百、千、万等,整数最小的计数单位是1,整数有无数个。

2. 用除法算式表示平均分的过程与结果,形成认知冲突。

依次将4块、2块、1块月饼平均分成2份,用除法表示分的过程,看结果能否用整数表示。学生认识到,4÷2、2÷2的结果可以用整数表示,1÷2,结果比1小,不能用整数表示了。

3. 揭示课题。

分的结果比1还小,无法用整数表示了,怎么

办?这就需要创造出一种新的数来表示比1还小的数。我们的祖先就通过平均分,创造出了分数。今天我们就来初步认识分数。

分数是将整数均分得出的数。上述片段中先让学生认识到1、2、3……都是整数,整数最小的计数单位是1。接着让学生依次将4个、2个、1个月饼平均分成2份,并用除法表示分的过程和结果。学生发现把1个月饼平均分成2份后,每份是半个,不能再用整数表示分的结果,形成了认知冲突。最后让学生认识到,要表示“半块”这样的比1小的数,需要创造新的数,认识到引发数域扩张的必然性。引导学生用除法表示分的过程,用商表示分的结果,可以从中深入体会到引入分数的重要性。

【片段二】用分数表示均分1块月饼后每份的大小

1. 通过操作,把1块月饼分成2个半块。

引导学生用一张圆形纸片表示月饼,通过对折,把1块月饼平均分成2份,每份是半块。

2. 用分数表示“半块”。

提问:半块比一块小,没有办法用整数表示了,谁知道我们的祖先创造了什么样的分数来表示半块?

教师板书 $\frac{1}{2}$ 。引导学生读写,并认识分数各部分的名称及其所表示的实际意义。让学生认识到像 $\frac{1}{2}$ 这样的数,是分出来的数,叫分数,与整数相对。

判断:把1块月饼分成2份,每份就是 $\frac{1}{2}$ 块。

通过辨析让学生认识到把1块月饼平均分成2份,每份才是 $\frac{1}{2}$ 块。

3. 尝试用分数表示任意均分1块月饼后每份的大小。

出示被平均分成4份的月饼,让学生用一个

数表示每份的大小。学生认识到,每份是四分之一块, $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ (块)。

引导学生操作或想象:还可以把1块月饼平均分成几份?每份是几分之一块?根据学生的回答,教师依次板书算式: $1 \div 8 = \frac{1}{8}$ (块), $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ (块)……在此基础上,让学生比较黑板上几个分数的大小。

上述教学片段先让学生通过对折,认识平均分成2份,每份是半块。接着,让学生认识到半块月饼是2份中的1份,写为 $\frac{1}{2}$ 块,即1除以2的商是 $\frac{1}{2}$,表示把1块月饼平均分成2份,每份就是 $\frac{1}{2}$ 块。再通过辨析,明确平均分基于分数的重要性。然后让学生自主进行知识迁移,认识 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 等分数表示分到的月饼大小。从半块自然过渡到 $\frac{1}{2}$ 块,再到 $\frac{1}{4}$ 块、 $\frac{1}{8}$ 块等,指向的都是数量,学生很容易比较出这几个分数的大小。

【片段三】用分数表示均分其他的“1”后每份的大小

1. 均分1千克的大枣。

出示1袋1千克的大枣(里面有10小袋)。

讨论:如果把1千克的大枣平均分成2份,每份是多少千克?实际上就是多少克?如果把这1千克大枣平均分成5份、10份呢?

让学生认识到:把1千克大枣平均分成2份,每份是 $\frac{1}{2}$ 千克,也就是500克。并引导学生依次用分数表示其他均分的结果。

2. 均分1小时的时间。

演示时钟:分钟在钟面上走1圈,是1小时。

讨论:如果经过时间是 $\frac{1}{2}$ 小时,分钟会从12走到哪里?你还想认识几分之一小时?分钟会从

12走到哪里?

3. 自主尝试均分其他的“1”。

讨论:想一想,还可以把什么物品平均分,每份用哪个分数表示?

上述过程通过均分1千克大枣、均分1小时的时间,再自主尝试均分其他的“1”,让学生用分数表示均分后每份数量的大小,强化了对分数“量的意义”的理解。学生从中认识到,分数和整数一样,本质上都表示数量的多少,均分的结果不足1,每份的大小就需要用分数来表示,从而感悟到数概念本质上的一致性。

【片段四】在数轴上确定分数的位置

1. 用分数表示路程。

出示三只蚂蚁在1米赛道上比赛爬行的情境图,让学生用分数表示出三只蚂蚁爬行的路程:

甲是 $\frac{1}{2}$ 米,乙是 $\frac{1}{5}$ 米,丙是 $\frac{1}{10}$ 米。

2. 在数轴上确定几分之一的的位置。

将跑道细化为一条线段,再形成数轴。

讨论:0到1之间能用整数表示吗?为什么?

可以用什么数表示? $\frac{1}{2}$ 的家在数轴上什么位置?

你是怎么找到的? $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{10}$ 呢?还能在数轴上找到几

分之一的家?

通过创设蚂蚁在1米跑道上比赛爬行的情境,让学生用分数表示出甲、乙、丙三只蚂蚁分别爬行的米数。图中没有平均分的痕迹,让学生先估测,再验证,能有效提升对分数的直觉和感悟。学生认识到1分米= $\frac{1}{10}$ 米,也为后续认识小数作了有效铺垫。

最后,将跑道变成数轴,让学生在数轴上分别确定各个分数的位置,进一步认识到分数是一个数,每个分数都能在数轴上找到相应的位置,有效培养数感。

【片段五】认识分数与整数1的联系

小结:有了整数,为什么还要创造出分数?几分之一这样的分数是怎么分出来的?

推想:分数家族中还会有什么样的分数?

全课总结,让学生认识到分数几分之一与整数1之间的联系:把一个物品平均分成几份,每份就是几分之一,即 $1 \div (\quad) = \frac{1}{(\quad)}$,有效形成合理的认知结构。接着引导学生推想到几分之几这样的分数,并鼓励课后研究其意义,能有效激发学生的探究欲望。

资料存盘

1.《认识分数》课标解读。

《义务教育数学课程标准(2022年版)》在“学段目标”中提出:经历分数的形成过程,初步认识分数;理解分数的意义,能进行分数的四则运算。在“课程内容”中指出:学生经历由数量到数的形成过程,理解和掌握数的概念;结合具体情境探索并理解分数的意义,感悟分数单位,理解整数除法与分数的关系,会进行小数、分数的转

化,进一步发展数感和运算能力。

2. 分数在中国的历史。

古汉语中,分数随处可见。如:大都不过参国之一,中五之一,小九之一。筹算除法也包含了分数的表示法,如筹算 $309 \div 7$ 的结果是 $44 + \frac{1}{7}$ 。《算数书》《九章算术》更是世界上最早系统阐述分数的著作。

【本文系江苏省高等教育教改研究立项课题(项目编号:2021JSJG201)的研究成果。】